Matemáticas 3. TERCER PARCIAL Abril Julio 2012 Miguel Guzmán

Pregunta 1.

a.- Buscamos un conjunto generador del subespacio, se conoce que debe cumplir las condiciones

$$\begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ 2x + z + t = 0 \end{cases} \quad => \quad \begin{cases} y = -x \\ z = -t - 2x \end{cases}$$

Luego se tiene

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ -t - 2x \\ t \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Se cumple que son LI por lo que

$$Base_H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Al tener una base, procedemos a ortonormalizar la base por proceso Gram-Schmidt.

Sea $U = \{U_1, U_2\}$ una base ortonormal de H, procedemos

$$U_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Buscamos el vector ortogonal.

$$V_2' = V_2 - \langle V_2, U_1 \rangle U_1 \quad => \quad V_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6}(2) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad => \quad V_2' = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Para finalizar

$$U_2 = \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Por lo que

$$\boldsymbol{U} = \left\{ \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{6}}} \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{-2} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{12}}} \begin{pmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{3} \end{pmatrix} \right\} \quad \boldsymbol{RESPUESTA}$$

b.- Buscamos $H^{\perp}$, se debe cumplir la condición (definición de complemento ortogonal)

$$(1) \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad => \quad x - y - 2z = 0 \quad => \quad x = y + 2z$$

$$(2) \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad => \quad -z + t = 0 \quad => \quad t = z$$

Por lo que se tendrá

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + 2t \\ y \\ t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se demuestra que son LI por lo que

$$\boldsymbol{Base}_{H^{\perp}} = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \right\} \quad \boldsymbol{RESPUESTA}$$

c.- Sea el vector $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ hallar $proy_{H^{\perp}} v$, dado a que debemos ortonormalizar la Base del complemento ortogonal y ya se ha hecho muy largo el ejercicio, hallemos la $proy_H v$ la cual ya tenemos la base ortonormalizada.

$$proy_H v = \langle v, U_1 \rangle U_1 + \langle v, U_2 \rangle U_2 \quad => \quad h = \frac{1}{6} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{12} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$h = \frac{1}{6}(-2) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{12}(2) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad => \quad h = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por otro lado, $proy_{H^{\perp}} v = v - proy_H v$

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad => \quad \boldsymbol{p = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \quad \boldsymbol{RESPUESTA}$$

Pregunta 2.

a.- Buscamos el espacio Nulo. Por definición es

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0x^2 + 0x + 0 \quad => \quad (b+c)x^2 + dx + 2b + 2c = 0x^2 + 0x + 0$$

Se tiene

$$\begin{cases} b + c = 0 \\ d = 0 \\ 2b + 2c = 0 \end{cases} \quad => \quad d = 0\,; b = -c$$

Por lo que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se demuestra que son LI por lo que

$$\boldsymbol{Base_{nuT}} = \left\{\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\right\} \quad \boldsymbol{RESPUESTA}$$

La **nulidad** (dimensión del espacio nulo) es **2**.

b.- Para buscar la matriz asociada, buscamos los transformados de la base canónica de las matrices de orden 2.

$$T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0x^2 + 0x + 0 \;\; ; \;\; T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = x^2 + 0x + 2 \;\; ; \;\; T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = x^2 + 0x + 2$$

$$T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0x^2 + x + 0$$

Escribimos en forma matricial

$$\boldsymbol{A_T} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}_{\boldsymbol{3x4}} \quad \boldsymbol{RESPUESTA}$$

c.- Para que el polinomio pertenezca a la imagen dicho polinomio debe ser generado por la imagen, entonces

$$(1-k)x^2 + (k+1)x + (k+3) = (b+c)x^2 + dx + 2b + 2c$$

Se tiene un sistema

$$\begin{cases}(1-k)=b+c\\ k+1=d\\ 2b+2c=k+3\end{cases}$$

La incógnita son b,c,d, luego del sistema

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1-k\\ 0 & 0 & 1 \vdots & k+1\\ 2 & 2 & 0 & k+3\end{pmatrix} \overset{f_3\to f_3-2f_1}{\rightarrow} \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1-k\\ 0 & 0 & 1 \vdots & k+1\\ 0 & 0 & 0 & 3k+1\end{pmatrix}$$

Para que existan soluciones a la combinación se debe cumplir que

$$\boldsymbol{k=-\frac{1}{3}} \quad \boldsymbol{RESPUESTA.}$$

Otra forma de realizar el ejercicio es buscar la imagen de la transformación, se entiende COMO SE FORMA LOS ELEMENTO DE LLEGADA

Se sabe de la transformación que

$$T\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=(b+c)x^2+dx+2(b+c)=(b+c)(x^2+2)+d(x)$$

Observamos que la imagen de la transformación es

$$ImT=\{(x^2+2),(x)\}$$

Por lo que, ahora que conocemos la imagen, comprobamos

$$(1-k)x^2+(k+1)x+(k+3)=\alpha(x^2+2)+\beta x$$

Implica que al menos debe existir los valores de α,β para que exista la combinación

$$(1-k)x^2+(k+1)x+(k+3)=\alpha(x^2)+\beta x\ +2\alpha$$

Mismo sistema anterior

$$\begin{cases}1-k=\alpha\\ k+1=\beta\\ k+3=2\alpha\end{cases} \quad se\ debe\ cumplir \quad \alpha=1-k=\frac{k+3}{2} \quad => \quad k=-\frac{1}{3}\ \ RESP$$

Pregunta 3.

a.- Para buscar una base del espacio fila, ante todo busquemos las filas LI, mediante reducción Gauss se tiene

$$\text{rref}\left(\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & 0\\ 1 & 1 & -1 & 1\\ 2 & 3 & 3 & 1\\ 1 & 4 & 14 & -2\end{pmatrix}\right) \rightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & -6 & 2\\ 0 & 1 & 5 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Por lo que

$$\boldsymbol{Base_{R_A}} = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{-6} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{5} \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix} \right\} \quad \mathbf{dim}(\boldsymbol{R_A}) = \mathbf{2} \quad \boldsymbol{RESPUESTA}$$

b.- Nos indica que el subespacio H es igual al espacio fila por lo que hablamos de R^4, nos piden el complemento ortogonal del espacio. Entonces se debe cumplir

$$(1) \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \quad => \quad x - 6z + 2w = 0 \quad => \quad x = 6z - 2w$$

$$(2) \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \quad => \quad y + 5z - w = 0 \quad => \quad y = w - 5z$$

Entonces

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6z - 2w \\ w - 5z \\ z \\ w \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Se comprueba que son LI por lo que

$$\boldsymbol{Base_{H^{\perp}}} = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{6} \\ \mathbf{-5} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} \right\} \quad \mathbf{dim}(\boldsymbol{H^{\perp}}) = \mathbf{2} \quad \boldsymbol{RESPUESTA}$$

c.- (Pregunta absurda, ya vera porque)

Para el espacio nulo de la matriz se tiene que por definición $N_A => Ax = 0$, entiéndase todo vector de R^4 que llegue al nulo de R^4, se resuelve entonces el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 14 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Reduciendo la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se da cuenta que estamos hallando exactamente el complemento ortogonal. La verdad NO ENTIENDO PORQUE HICIERON ESTO. (Ojo solo porque el subespacio H es formado por las filas de A) Pero bue.

Se tendrá que

$$\boldsymbol{Base_{N_A}} = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{6} \\ \mathbf{-5} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} \right\} \qquad \boldsymbol{nulidad} = \mathbf{2} \quad \boldsymbol{RESPUESTA}$$

d.- Para el espacio columna, busquemos las columnas LI de la matriz, para ello se transpone y se reduce Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & 3 & 14 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \text{Implica} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$\boldsymbol{R_{A^T}} = \boldsymbol{C_A} = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} \end{pmatrix} \right\} \ \mathbf{dim}(\boldsymbol{C_A}) = \mathbf{2} \qquad \boldsymbol{RESPUESTA}$$

Pregunta 4.

Ya nos dan el polinomio característico de la matriz por lo que

$$p(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 16) = 0 \quad => \quad \lambda_1 = 2 \quad MA = 2 \quad , \quad \lambda_2 = 16 \quad MA = 1$$

Sabemos que por teorema λ_2 tendrá UN autovector asociado, por ello busquemos los autovectores de λ_1 para saber si cumple el teorema de diagonalizacion de matrices

Para $\lambda_1 = 2$ se tiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \overbrace{=>}^{reduciendo} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se debe cumplir $x + 2y + 3z = 0 \quad => \quad x = -2y - 3z$, por lo que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y - 3z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Se tiene

$$u_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dos autovectores asociados al autovalor, por lo que $MG = 2 = MA$,

Por teorema la matriz SI es diagonalizable, busquemos el tercer autovector.

Para $\lambda_2 = 16$ se tiene

$$\begin{pmatrix} -13 & 2 & 3 \\ 2 & -10 & 6 \\ 3 & 6 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{reduciendo}{\widetilde{=>}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se cumple que, $x = \frac{1}{3}z$; $y = \frac{2}{3}z$, entonces

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}z \\ \frac{2}{3}z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \quad => \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Escribimos la matriz P y D

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{16} \end{pmatrix} \;;\; \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{-3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{RESPUESTA}$$

b.- OTRA PREGUNTA QUE NO TIENE SENTIDO. Ya que la matriz es diagonalizable, esta pregunta no tiene respuesta.